de considérations géométriques. Sous le nom de *topologie*, nous devrons donc comprendre l'étude des rapports modaux concernant les formations spatiales ou celle des lois qui régissent la connexion, la situation réciproque et la succession des points, des lignes, des surfaces, des corps et de leurs parties ou de leurs agrégats dans l'espace, abstraction faite de tout rapport de mesure et de grandeur. Grâce au concept de succession, qui est étroitement apparenté à celui de mouvement, la topologie entretient avec la mécanique une relation semblable à celle qu'elle a avec la géométrie où, là encore, la vitesse progressive ou la vitesse angulaire du mouvement tournant, de même que la masse, la grandeur du mouvement, les forces ou les moments ne sont bien entendu pas pris en considération essentielle selon leur quantité, mais uniquement selon les rapports modaux entre formations mobiles ou mues dans l'espace.

Pour atteindre au rang de science exacte auquel elle semble aspirer, la Topologie devra réduire les faits de l'intuition spatiale à des concepts les plus simples possibles, avec lesquels elle accomplira les opérations, quasiment comme en calcul, à l'aide de signes et de symboles appropriés et choisis par analogie avec ceux de la mathématique, selon des règles simples.

De la position

Nous commencerons par une considération préliminaire simple, prise par analogie avec la théorie combinatoire et s'appuyant sur le schéma des trois dimensions de l'espace. Chaque objet spatial peut en effet être affecté de trois droites se croisant à angle droit à l'intérieur de celui-ci et à partir desquelles nous pouvons différencier les uns des autres, ses dimensions et ses côtés. Dans les cas concrets, on utilise habituellement plusieurs appellations pour ces dimensions et ces côtés, appellations dont l'intérêt est plus évident pour la topologie que pour la géométrie. Pour l'espace illimité, à un endroit quelconque de la surface de la terre, c'est la ligne de sonde qui s'y prêtera le plus naturellement, avec les deux directions opposées : haut et bas, la ligne méridienne (horizontale) comprenant le Sud et le Nord[1], et la ligne horizontale perpendiculaire aux deux autres avec l'Ouest et l'Est ; pour une maison, ce seront sa hauteur avec le haut et le bas, le devant et le derrière, la droite et la gauche, etc. Si nous désignons le point de croisement par O, et trois points arbitrairement choisis sur les trois axes de dimension par les nombres ordinaux 1, 2, 3 — considérés comme positifs en l'absence de tout signe — et trois autres points choisis sur les axes du côté opposé au point zéro par les nombres (négatifs) $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, de telle façon que les nombres de même valeur mais possèdant des signes opposés appartiennent respectivement au même axe, alors $0\bar{1}$ et 01 désigneront les côtés opposés de la première dimension, de même que 02 et $0\bar{2}$ désigneront ceux de la deuxième et enfin 03 et $0\bar{3}$ ceux de la troisième.

Prenons par exemple un dé de jeu ordinaire (dont les faces portent, comme il est de règle, les numéros 1 à 6 répartis de telle façon que la somme de deux faces opposées soit toujours 7), imaginons 0 comme étant situé au milieu du dé, et qu'au lieu des nombres un, deux, trois, quatre, cinq et six, soient respectivement inscrits sur les faces de ce dé les chiffres 1, 2, 3, $\bar{3}$, $\bar{2}$, $\bar{1}$. Deux corps A et B ainsi munis de leurs signes de dimension peuvent maintenant être disposés côte à côte ou bien l'un dans l'autre de telle façon que chacun des trois axes de l'un soit orienté de la même façon que chacun des trois axes de l'autre. De telles dispositions peuvent être appelées (au sens étroit du terme) *positions,* et, dans le cas où les axes ne coïncident pas, nous ne prendrons pas plus en considération la situation de la ligne de droite qui relie les points zéro par rapport aux axes que la grandeur de cette ligne. La position de B par rapport à A sera simplement désignée par pos(A)B ; de même, celle de A par rapport à B le sera par pos(B)A. La détermination topologique d'une position B par rapport à A se fait au moyen d'une forme comportant les trois chiffres 1, 2, 3, dans n'importe quel ordre et avec des signes quelconques, forme dans laquelle les trois

1. La détermination des quatre régions du ciel ne serait possible que sous les deux pôles géographiques et les deux lignes horizontales devraient alors être fixées à partir d'objets terrestres choisis arbitrairement.

chiffres indiquent, selon l'ordre choisi, ceux des trois côtés de B qui sont orientés de la même façon que les côtés 1, 2, 3 de A ou qui « conspirent »* avec ces derniers. Si donc par exemple la position

$$\mathrm{pos(A)B} = 2\ \bar{3}\ \bar{1}$$

nous était donnée, B serait alors par rapport à A dans une position telle que les côtés 2, $\bar{3}$, $\bar{1}$ de B coïncideraient respectivement avec les côtés 1, 2, 3 de A. Pour chaque position, les trois chiffres de la forme 1, 2, 3 peuvent ainsi être considérés comme des *indices* ou numéros des places.

Il est évident que toutes les positions possibles d'un corps B par rapport à un autre corps A doivent apparaître dans les quarante-huit formes qu'il est possible de constituer par changement des positions et des signes de façon permutatoire et qui sont réunies dans le tableau suivant :

$1\ 2\ 3$	$2\ 3\ 1$	$3\ 1\ 2$	$\bar{3}\ \bar{2}\ \bar{1}$	$\bar{2}\ \bar{1}\ \bar{3}$	$\bar{1}\ \bar{3}\ \bar{2}$
$1\ \bar{2}\ \bar{3}$	$2\ \bar{3}\ \bar{1}$	$3\ \bar{1}\ \bar{2}$	$\bar{3}\ 2\ 1$	$\bar{2}\ 1\ 3$	$\bar{1}\ 3\ 2$
$\bar{1}\ 2\ \bar{3}$	$\bar{2}\ 3\ \bar{1}$	$\bar{3}\ 1\ \bar{2}$	$3\ \bar{2}\ 1$	$2\ \bar{1}\ 3$	$1\ \bar{3}\ 2$
$\bar{1}\ \bar{2}\ 3$	$\bar{2}\ \bar{3}\ 1$	$\bar{3}\ \bar{1}\ 2$	$3\ 2\ \bar{1}$	$2\ 1\ \bar{3}$	$1\ 3\ \bar{2}$
$\bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$	$\bar{2}\ \bar{3}\ \bar{1}$	$\bar{3}\ \bar{1}\ \bar{2}$	$3\ 2\ 1$	$2\ 1\ 3$	$1\ 3\ 2$
$\bar{1}\ 2\ 3$	$\bar{2}\ 3\ 1$	$\bar{3}\ 1\ 2$	$3\ \bar{2}\ \bar{1}$	$2\ \bar{1}\ \bar{3}$	$1\ \bar{3}\ \bar{2}$
$1\ \bar{2}\ 3$	$2\ \bar{3}\ 1$	$3\ \bar{1}\ 2$	$\bar{3}\ 2\ \bar{1}$	$\bar{2}\ 1\ \bar{3}$	$\bar{1}\ 3\ \bar{2}$
$1\ 2\ \bar{3}$	$2\ 3\ \bar{1}$	$3\ 1\ \bar{2}$	$\bar{3}\ \bar{2}\ 1$	$\bar{2}\ \bar{1}\ 3$	$\bar{1}\ \bar{3}\ 2$

Lorsqu'on réalise effectivement l'ensemble des positions dans lesquelles il est possible de placer deux corps l'un par rapport à l'autre après en avoir fixé les axes de position, on s'aperçoit qu'on ne peut réaliser *que* les vingt-quatre formes du haut ou *que* les vingt-quatre formes du bas. Si en effet nous disons que *c* représente un des deux chiffres 3 et $\bar{3}$, et si nous amenons deux corps dans la position 1 2 *c*, alors le choix entre ces deux valeurs pour définir *c* ne demeure possible que tant que nous nous permettons d'échanger 3 avec $\bar{3}$ dans l'un des deux corps ou de renverser son troisième axe sur lui-même. La valeur qui occuperait

* *Conspirieren* dans l'original.

alors, dans la forme de position 1 2 *c*, la troisième position *c*, dépend, en fonction de cela, de la situation réciproque des quatre points 0, 1, 2, 3 dans chacun des deux corps. Si nous imaginons maintenant, à la place du point zéro, un individu dont le sommet du crâne est orienté vers le point 1 et le visage vers le point 2, alors le point 3 se situera soit du côté droit, soit du côté gauche. La situation réciproque des trois axes de position est appelée, dans le cas où 3 se situe à droite, une position d'axe *droit* et dans le cas où 3 se situe à gauche, une position d'axe *gauche* ; deux positions d'axe droit ou deux positions d'axe gauche sont appelées deux à deux *homologues* ; une droite et une gauche, *hétérologues*. La position d'axe droit est homologue avec celle que nous obtenons quand nous plaçon 0 en un point à la surface de la terre, 1 au zénith, 2 vers le Sud et 3 vers l'Ouest ; la position de gauche, avec celle où 0 se situe au soleil, 1 au pôle Nord de l'écliptique, 2 au point zéro du Bélier et 3 au point zéro du Cancer. Si nous prenions maintenant des pièces de monnaie identiques, portant une inscription sur la tranche et que nous placions 1 sur la face imagée, 2 et 3 sur la tranche de sorte que l'inscription coure dans le sens 2, $\bar{3}$, $\bar{2}$, 3, nous obtiendrons alors, et ce même pour des pièce d'un millésime identique, tantôt des positions d'axe droit, tantôt des positions d'axe gauche[1] ; de même pour les dés de jeu, si on les chiffre de la façon qui a été mentionnée plus haut.

Nous sommes donc autorisés à dire à présent que deux corps admettent toujours vingt-quatre positions et vingt-quatre seulement ; ce sont en effet celles qui sont contenues dans la première section du tableau précédent lorsque leurs positions d'axe sont homologues, et dans la deuxième section lorsqu'ils ont des positions d'axe hétérologues. Nous appellerons les vingt-quatre premières positions *positives*, les vingt-quatre autres *négatives*. On considèrera comme positions primaires, pour celles-là : 1 2 3 ; pour celles-ci : $\bar{1}\,\bar{2}\,\bar{3}$. Ces différentes formes sont ordonnées

1. Cela ne peut bien entendu être le cas que là où, comme c'est l'usage, les pièces de monnaie ont la possibilité de perdre, entre le crénelage et la frappe, leur situation concordante, mais non point là où les deux manœuvres ont lieu simultanément, comme avec la machine à frapper la monnaie de Droz.

dans le tableau précédent, de telle façon qu'à chaque position positive de la section haute corresponde une position négative dans la section du bas, laquelle est produite par changement de l'ensemble des trois signes. Ces deux sections se décomposent l'une et l'autre en six colonnes, dont chacune contient huit positions : quatre positives et quatre négatives, qui ne se distinguent que par les signes de leurs membres. L'ordre des trois membres dans les positions des trois premières colonnes où la suite répond du schéma 1, 2, 3, 1, 2, peut être appelé *l'ordre montant* ; celui des trois dernières colonnes, selon le schéma 3, 2, 1, 3, 2 : *l'ordre descendant*. Dans les douze premières positions positives et dans les douze dernières négatives, on trouve un nombre pair (0 ou 2) de membres négatifs ; dans les autres, un nombre impair (1 ou 3).

Après ces remarques, il est aisé de s'apercevoir que chaque position donnée change son propre signe par changement du signe d'un seul de ses membres ou des trois (à savoir qu'elle devient négative lorsqu'elle était positive et vice versa), mais qu'elle conserve son signe par le changement de signe de deux de ses membres ; en outre, la permutation des signes est sans influence sur le signe de la position, mais par contre, la permutation des membres ne reste sans influence sur le signe de la position que tant que l'ordre des membres n'est pas renversé en son opposé. Puisque chaque forme de position donnée se laisse dériver par changement de signe et déplacement de membre à partir de la position primaire positive, il est alors facile de reconnaître si cette forme est positive ou négative, et ce, bien entendu, sans l'aide du tableau ni par essai intuitif. Ainsi la position $\bar{1}\ \bar{3}\ \bar{2}$ doit nécessairement être positive en raison de l'ordre qui est descendant et du nombre impair de membres négatifs ; de même $\bar{2}$ 3 $\bar{1}$ doit-il nécessairement être positif en raison de l'ordre montant et des deux signes moins ; à l'inverse, 2 1 3, en raison de l'ordre descendant et en l'absence de signe moins, ainsi que $\bar{3}$ $\bar{1}$ $\bar{2}$ qui a un ordre montant et un triple signe moins, sont des positions négatives. Le troisième membre d'une forme de position *a b c* dans laquelle deux membres nous sont donnés avec le signe de la position, se laissera découvrir avec la même facilité. Si par exemple deux corps ayant tous deux une position d'axe gauche, sont en position $\bar{3}\ b\ 2$, on aura alors $b = \bar{1}$ puisque l'ordre doit être montant et la position, positive.

*Intervertir** une position donnée de B en A revient à dire qu'on fait dériver d'elle la position de A en B. Cela s'obtient en échangeant les membres de la position donnée ainsi que leurs indices (correspondant à la position primaire positive), en transférant les signes moins existants, à partir des nouveaux indices, aux membres nouveaux et enfin en ordonnant ceux-ci selon les indices.

Si l'on doit intervertir par exemple

$$\text{pos (A)B} = \bar{2}\ 3\ \bar{1},$$

on devra mettre, au lieu du membre $\bar{1}$ qui se trouve à la troisième place, $\bar{3}$ à la première place ; au lieu du membre $\bar{2}$ qui se trouve à la première place, $\bar{1}$ à la deuxième place ; et au lieu du membre 3 qui se trouve à la deuxième place, 2 à la troisième ; on obtient ainsi

$$\text{pos(B)A} = \bar{3}\ \bar{1}\ 2$$

De la même façon, on obtiendrait naturellement à nouveau la position de départ par simple inversion à partir de cette position inversée.

Il résulte du concept d'inversion que la position inversée doit avoir le même signe que la position originelle et le même nombre de signes moins dans sa forme, donc également le même ordre dans la suite de ses membres.

Quelques positions ne modifient pas leur forme par inversion, comme tel est par exemple le cas pour la position primaire positive 1 2 3, puisque tout corps est avec lui-même dans cette position ; ces positions expriment ainsi le même rapport de positions mutuelles entre deux corps. Du concept d'inversion découlent aussi les conditions par lesquelles une position reste inchangée par inversion, c'est-à-dire est *réciproque*. Dans la première colonne du tableau des quarante-huit positions, tous les membres sont homonymes avec leurs indices, comme dans la position primaire ; ici, en cas d'inversion, tout membre doit alors rester à sa place avec son signe. Dans les deux sections, les quatre positions de la première colonne sont aussi toutes récipro-

* *Invertieren.*

ques. Dans les quatrième, cinquième et sixième colonnes, pour chaque forme, un seul membre apparaît homonyme avec son indice et garde donc la place précédente, accompagné de son signe : mais les deux autres membres qui ont échangé leurs indices ne réapparaîtront, en cas d'inversion, à la même place et sans changement de signe, que s'ils ont les mêmes signes. Dans les deux sections on ne trouve alors, parmi les quatre positions des trois dernières colonnes, que deux qui soient réciproques. Dans les deuxième et troisième colonnes enfin, où aucun membre n'est homonyme avec son indice, on ne peut rencontrer aucune position réciproque. Il existe donc au total vingt positions réciproques, c'est-à-dire

dix positions réciproques positives :

$$\begin{array}{ccccccc}
1\ 2\ 3 & & & & & & \\
1\ \bar{2}\ \bar{3} & \quad & \bar{3}\ \bar{2}\ \bar{1} & \quad & \bar{2}\ \bar{1}\ \bar{3} & \quad & \bar{1}\ \bar{3}\ \bar{2} \\
\bar{1}\ 2\ \bar{3} & & 3\ \bar{2}\ 1 & & 2\ 1\ \bar{3} & & \bar{1}\ 3\ 2 \\
\bar{1}\ \bar{2}\ 3 & & & & & &
\end{array}$$

dix positions réciproques négatives :

$$\begin{array}{ccccccc}
\bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3} & & & & & & \\
\bar{1}\ 2\ 3 & \quad & 3\ 2\ 1 & \quad & 2\ 1\ 3 & \quad & 1\ 3\ 2 \\
1\ \bar{2}\ 3 & & \bar{3}\ 2\ \bar{1} & & \bar{2}\ \bar{1}\ 3 & & 1\ \bar{3}\ \bar{2} \\
1\ 2\ \bar{3} & & & & & &
\end{array}$$

Les quatorze positions non réciproques restantes de chaque section, groupées selon leur liaison les unes avec les autres par inversion, sont

sept paires de positions positives :

$$\begin{array}{ccc}
2\ 3\ 1 & \qquad & 3\ 1\ 2 \\
2\ \bar{3}\ \bar{1} & & \bar{3}\ 1\ \bar{2} \\
\bar{2}\ 3\ \bar{1} & & \bar{3}\ \bar{1}\ 2 \\
\bar{2}\ \bar{3}\ 1 & & 3\ \bar{1}\ \bar{2} \\
\bar{3}\ 2\ 1 & & 3\ 2\ \bar{1} \\
\bar{2}\ 1\ 3 & & 2\ \bar{1}\ 3 \\
1\ \bar{3}\ 2 & & 1\ 3\ \bar{2}
\end{array}$$

sept paires de positions négatives :

$\bar{2}\ \bar{3}\ \bar{1}$	$\bar{3}\ \bar{1}\ \bar{2}$
$\bar{2}\ 3\ 1$	$3\ \bar{1}\ 2$
$2\ \bar{3}\ 1$	$3\ 1\ \bar{2}$
$2\ 3\ \bar{1}$	$\bar{3}\ 1\ 2$
$3\ \bar{2}\ \bar{1}$	$\bar{3}\ \bar{2}\ 1$
$2\ \bar{1}\ \bar{3}$	$\bar{2}\ 1\ \bar{3}$
$\bar{1}\ 3\ \bar{2}$	$\bar{1}\ \bar{3}\ 2$

On nommera positions successives ou *consécutives*, celles qui expriment pour une série de corps A, B, C, ... la position du deuxième par rapport au premier, du troisième par rapport au deuxième, du quatrième par rapport au troisième, etc. Sont alors dites consécutives, les positions pos(A)B, pos(B)C, pos(C)D ; et lorsque pos(B)C = 1 2 3, c'est-à-dire si B et C s'égalent positionnellement, sont alors également dites consécutives les positions pos(A)B et pos(C)D. Il est évident que chaque inversion engendre des positions consécutives si deux positions non consécutives ont en commun un élément ou (ce qui revient au même). Si un élément de l'une se trouve avec un élément de l'autre dans la position primaire primitive, il est alors possible de le rendre consécutif par réordonnancement ou par inversion. Ainsi s'ensuivent, à partir par exemple des positions pos(B)C, pos(A)B, par simple inversion de leur ordre ou par inversion des deux, les positions consécutives pos(A)B, pos(B)C ou pos(C)B, pos(B)A ; les positions pos(D)E, pos(F)E deviennent consécutives par inversion de la seconde ; pos(G)H, pos(G)K deviennent consécutives, quant à elles, par inversion de la première.

La sommation des positions consécutives consiste en la dérivation d'une position du dernier élément vers le premier dans la série des éléments auxquels se réfèrent les positions données. La somme de pos(A)B, pos(B)C, pos(C)D, pos(D)E sera alors pos(A)E, ce qui peut s'exprimer symboliquement de la façon suivante :

$$\text{pos(A)B} + \text{(B)C} + \text{(C)D} + \text{(D)E} = \text{pos(A)E}.$$

Dans la mesure où seules des positions consécutives sont capables de sommation, l'expression

$$\text{pos(A)B} + \text{(C)D} + \text{(E)F} = \text{pos(A)F}$$

n'a de signification que dans le cas où pos(B)C = pos(D)E = 1 2 3 et où, dans la série A, B, C, D, E, F, les deuxièmes et troisièmes éléments d'une part, et les quatrième et cinquième éléments d'autre part sont positionnellement identiques. Si la position primaire positive apparaît alors dans un nombre quelconque de positions consécutives, elle peut à chaque fois être retranchée de la série sans effet sur la somme. Lorsqu'on doit faire la somme des positions données par leurs formes, cela implique alors nécessairement que l'on suppose ces positions consécutives.

On effectuera l'évaluation de la somme des positions consécutives qui nous sont données par leurs formes, selon un triple parcours des membres de chaque forme, au cours duquel on mettra pour plus de commodité les formes les unes au-dessous des autres. On négligera provisoirement tous les signes moins ; en procédant ainsi, le premier membre de la somme coïncide avec le membre de la dernière position auquel on aboutit si l'on a parcouru successivement, en partant du premier membre de la première position, les positions consécutives, à condition qu'à chaque étape, on passe dans la forme suivante par l'élément dont l'indice est homonyme avec l'élément rencontré à la forme précédente. On trouvera de la même façon le deuxième élément de la somme en partant du deuxième élément de la première position.

Si l'on a par exemple :

$$\begin{array}{rcl} \text{pos(A)B} & = & \bar{3}\ \bar{2}\ 1 \\ \text{pos(B)C} & = & 1\ \bar{3}\ \bar{2} \\ \text{pos(C)D} & = & 2\ 1\ \bar{3} \\ \text{pos(D)E} & = & 3\ \bar{1}\ 2 \\ \hline \end{array}$$

la somme sera

$$\text{pos(A)E} = 3\ \bar{2}\ \bar{1}$$

Les opérations se décomposent de la façon suivante : pour le premier membre : $\bar{3}$, $\bar{2}$, 1, 3 (ce qui donne 3) ; pour le deuxième membre : $\bar{2}$, $\bar{3}$, $\bar{3}$, 2 (ce qui donne $\bar{2}$) ; et pour le troisième : 1, 1, 2, $\bar{1}$ (ce qui donne $\bar{1}$). Du concept d'assemblage des positions consécutives, s'ensuit naturellement que le signe de la somme résulte du signe de chacun des membres de cette somme ; ainsi, dans l'exemple cité, la troisième forme étant positive et les trois autres négatives, il en résulte une somme négative.

Prenons un second exemple :

$$\left.\begin{aligned}
\text{pos }(E)F &= \bar{2}\ \bar{3}\ 1\ +\\
(F)G &= 3\ 2\ 1\ -\\
(G)H &= \bar{1}\ 3\ \bar{2}\ -\\
(H)I &= \bar{2}\ 3\ \bar{1}\ +\\
(I)K &= \bar{2}\ \bar{3}\ \bar{1}\ -
\end{aligned}\right\}\quad \text{pos}(E)K = \bar{2}\ 3\ 1\ -$$

$$\left.\begin{aligned}
(K)L &= 2\ 3\ 1\ +\\
(L)M &= 2\ \bar{3}\ 1\ -\\
(M)N &= 1\ \bar{3}\ 2\ +\\
(N)O &= \bar{3}\ \bar{2}\ \bar{1}\ +\\
(O)P &= 2\ 3\ \bar{1}\ -
\end{aligned}\right\}\quad \text{pos}(K)P = 3\ 1\ 2\ +$$

la somme est :

$$(E)P = \bar{1}\ 2\ 3\ -$$

Les signes plus et moins apposés à chaque forme nous donnent le signe de la position. Dans ce cas-ci, la somme doit être une position négative. L'addition des deux sommes partielles comportant chacune cinq positions, donnerait le même résultat.

Une position donnée, réunie en une somme avec son inverse doit évidemment produire la position primaire positive, c'est-à-dire celle dans laquelle chaque corps se trouve placé par rapport à lui-même. Si la position est réciproque, elle sera alors doublée. De la même façon, des positions peuvent être triplées ou multipliées. Le multiple n d'une position positive est toujours une position positive ; le multiple n d'une position négative est négatif si n est impair et positif si n est pair. Lorsqu'on est en présence d'une série d'éléments A, B, C, D… qui sont consécutivement dans la même position, ils ne sont positionnellement identiques que dans le cas unique où leur position commune est la position primaire primitive 1 2 3. Mais si la position commune est une des dix-neuf autres positions réciproques, alors tous les éléments impairs A, C, E… sont dans la position primaire positive les uns par rapport aux autres ; de même pour les éléments pairs B, D, F… Les vingt-huit autres positions sont toujours distinctes et différentes entre elles pour ceux de leurs multiples qui sont égaux à la position primaire positive. A savoir :

— premièrement, les huit positions positives :

$$\begin{array}{ccc} 2\ 3\ 1 & \qquad & 3\ 1\ 2 \\ 2\ \bar{3}\ \bar{1} & & \bar{3}\ 1\ \bar{2} \\ \bar{2}\ 3\ \bar{1} & & \bar{3}\ \bar{1}\ 2 \\ \bar{2}\ \bar{3}\ 1 & & 3\ \bar{1}\ \bar{2} \end{array}$$

qui donnent, triplées, 1 2 3. Si une de ces huit positions est consécutivement commune à la série des éléments A, B, C, D... en son entier, dans ce cas les quatrième, septième, dixième, etc. éléments seront positionnellement orientés avec le premier élément ; de la même façon, les cinquième, huitième, onzième, etc. éléments seront orientés avec le deuxième ; et les sixième, neuvième, douzième, etc., avec le troisième.

— deuxièmement, les huit positions négatives :

$$\begin{array}{ccc} \bar{2}\ \bar{3}\ \bar{1} & \qquad & \bar{3}\ \bar{1}\ \bar{2} \\ \bar{2}\ 3\ 1 & & 3\ \bar{1}\ 2 \\ 2\ \bar{3}\ 1 & & 3\ 1\ \bar{2} \\ 2\ 3\ \bar{1} & & \bar{3}\ 1\ 2 \end{array}$$

qui donnent, triplées, $\bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$ et multipliées par six, 1 2 3. Si tous les membres de la série A, B, C, etc., qui doivent dans ce cas avoir alternativement des positions d'axe gauche et droit, se trouvent consécutivement dans une de ces huit positions, alors les quatrième, dixième, seizième, etc. membres se trouvent dans la position primaire négative avec le premier ; les cinquième, onzième, dix-septième, etc. se trouvent dans cette même position avec le deuxième, et les sixième, douzième, dix-huitième, etc., avec le troisième ; cependant les septième, treizième, dix-neuvième, etc. sont dans la position positive de base 1 2 3 avec le premier ; les huitième, quatorzième, vingtième, etc., avec le deuxième ; les neuvième, quinzième, vingt et unième, etc., avec le troisième.

— troisièmement, les six positions positives

$$\begin{array}{ccc} \bar{3}\ 2\ 1 & \qquad & 3\ 2\ \bar{1} \\ \bar{2}\ 1\ 3 & & 2\ \bar{1}\ 3 \\ 1\ \bar{3}\ 2 & & 1\ 3\ \bar{2} \end{array}$$

ainsi que les six positions négatives

$$\begin{array}{ccc} 3\ \bar{2}\ \bar{1} & \qquad & \bar{3}\ \bar{2}\ 1 \\ 2\ \bar{1}\ \bar{3} & & \bar{2}\ 1\ \bar{3} \\ \bar{1}\ 3\ \bar{2} & & \bar{1}\ \bar{3}\ 2 \end{array}$$

conduisent par doublement aux positions positives réciproques ; c'est-à-dire que les première, deuxième et troisième paires de chacun des deux groupes aboutissent ainsi respectivement à

$$\bar{1}\ 2\ \bar{3}$$
$$\bar{1}\ \bar{2}\ 3$$
$$1\ \bar{2}\ \bar{3}$$

et par quadruplement à la position primaire positive. Ici*, le quatrième membre suivant serait donc positionnellement orienté avec le membre de départ.

Le rapport situationnel entre des objets et leurs images catoptrique et dioptrique pourrait nous servir d'exemple d'application de ces considérations sur les positions.

Dans le cas le plus simple, où, d'un objet corporel placé devant un miroir plan, surgit une image virtuelle elle aussi corporelle, derrière le miroir, image qui est comme on sait géométriquement identique dans toutes ses dimensions avec l'objet et qui ne lui est distincte que du seul point de vue topologique, dans un tel cas, nous plaçons dans l'objet un des trois axes positionnels selon la direction qui est perpendiculaire par rapport au miroir ; en conséquence de quoi les deux autres axes se trouvent dans le plan du miroir. De la sorte, si dans pos(A)B, A signifie l'objet et B son image dans le miroir, seul l'axe qui est perpendiculaire au plan du miroir voit sa position changée ou remplacée par un signe moins, tandis que les deux autres « conspirent » comme dans la position primaire positive pour ce qui concerne tant l'image que l'objet. La position pos(A)B prend ainsi une des trois formes :

$$\bar{1}\ 2\ 3$$
$$1\ \bar{2}\ 3$$
$$1\ 2\ \bar{3}$$

selon que c'est le premier, le deuxième ou le troisième axe qui est perpendiculaire par rapport au miroir. Cette position est en tous cas négative et repose sur des positions d'axe hétérologues dans l'objet et dans l'image en miroir correspondante.

* Pour une série A, B, C, D, etc. (N.d.T.)

Notre image, telle que nous la percevons dans un miroir plan, a une position d'axe gauche si nous nous pensons nous-mêmes pourvus d'une position d'axe droit — 1 en haut, 2 en avant, 3 à droite. Un miroir placé au-dessus ou en-dessous de nous donne à cette image la position $\bar{1}\ 2\ 3$ par rapport à notre corps propre ; si ce miroir est placé devant ou derrière nous, la position sera $1\ \bar{2}\ 3$; si enfin il est placé à notre droite ou à notre gauche, $1\ 2\ \bar{3}$. Le miroir plan, lors de la composition des images à partir des éléments de l'objet qu'il copie, inverse toujours la dimension posée perpendiculairement au plan du miroir. Il se produit ainsi un corps-image qui, en raison des positions d'axe hétérologues, ne peut être orienté positionnellement ni être mis en congruence avec le corps original, et ce malgré leur concordance géométrique. En dehors des rapports géométriques, c'est-à-dire considéré d'un point de vue purement topologique, cela vaut aussi bien pour les images virtuelles engendrées par des miroirs convexes — images d'objets qui se trouvent à une distance quelconque devant ces miroirs —, que pour les images virtuelles engendrées par des miroirs concaves — images d'objets qui se trouvent à une distance plus petite que la distance focale, devant le miroir. Cependant, pour les images réelles ou fantômes qui sont produites par des miroirs concaves à partir d'objets placés à une distance plus grande que la distance focale, s'ajoute à l'inversion de la dimension parallèle à l'axe du miroir, l'inversion des deux autres dimensions perpendiculaires à cet axe, d'où il résulte pour l'image par rapport à l'objet, la position primaire négative $\bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$.

Dans les miroirs concaves-convexes (difflexes), nous percevons, à partir d'objets éloignés de plus de la moitié du rayon de courbure de la concavité, des images pour lesquelles, en dehors de la dimension dirigée vers le miroir, une seule des deux autres apparaît inversée, à savoir celle dans laquelle la surface du miroir est concave. Ces simulacres d'images[1] sont ainsi dans une des positions positives $1\ \bar{2}\ \bar{3}$, $\bar{1}\ 2\ \bar{3}$, $\bar{1}\ \bar{2}\ 3$ par rapport

1. D'un point de vue optique, elles sont pour ainsi dire simultanément réelles et virtuelles.

aux objets qui les engendrent, selon que c'est le premier, le second ou le troisième axe de l'objet qui se trouve dans la direction de la convexité du plan du miroir. Pour les objets placés à une distance inférieure à la moitié du rayon de courbure de la concavité, on retrouve du point de vue topologique ce qu'on a constaté dans le cas des miroirs plans et convexes : les images se trouvent dans une des positions négatives $\bar{1}\,2\,3$, $1\,\bar{2}\,3$, $1\,2\,\bar{3}$.

Pour des images dioptriques engendrées par des lentilles sphériques, on obtient de semblables constatations. Les images virtuelles d'objets observés à travers des lentilles divergentes sont toujours positionnellement orientées avec leurs objets ou se trouvent dans la position primaire positive 1 2 3 par rapport à eux. La même chose vaut aussi pour les images virtuelles engendrées par des lentilles convergentes, à partir d'objets qui se trouvent placés à une distance inférieure à la distance focale, comme c'est le cas pour la loupe ou le microscope simple. Cependant, les images réelles d'objets placés au-delà de la distance focale, se trouvent dans une des trois positions positives $1\,\bar{2}\,\bar{3}$, $\bar{1}\,2\,\bar{3}$, $\bar{1}\,\bar{2}\,3$ par rapport à leurs objets, selon que c'est le premier, le second ou le troisième axe positionnel de l'objet qui est dans la direction de l'axe optique de la lentille. Les verres collectifs, dans un tel cas, renversent alors simultanément les deux dimensions perpendiculaires par rapport à l'axe optique, mais pas la troisième dimension qui se trouve dans l'axe optique.

Ces considérations, si élémentaires soient-elles, peuvent servir à constater avec une plus grande précision et en vue de leur usage scientifique, le sens de certaines expressions topologiques qui manquent de précision dans le langage de la vie courante. Dans les cas que nous avons considérés jusqu'à présent, nous avons rencontré des exemples d'une, de deux ou de trois inversions des dimensions d'un corps. L'inversion de deux dimensions donnait une position positive, donc une position d'axe homologue ; au contraire, l'inversion d'une ou de trois dimensions donnait des positions négatives et des positions d'axe hétérologues. Or, puisque l'inversion de deux dimensions peut être engendrée par simple changement de situation d'un même corps, et ce en faisant faire un demi-tour au corps autour du troisième axe (non inversé) pris comme axe de rotation, et puisque par ailleurs l'inversion d'une ou de trois dimensions intervient, en raison de l'intrication de l'hétérologie avec l'inversion, pour ainsi dire dans la construction interne du corps, et puisqu'enfin par ailleurs une simple inversion de dimension se laisse transformer grâce à un demi-tour du corps en une triple inversion, il semble donc utile d'appeler *inversion** proprement dite le cas où deux dimensions s'inversent simultanément par un demi-tour, et de réserver plutôt le terme de *perversion*** au cas de l'inversion d'une seule dimension ; et donc de considérer le corps, dans le cas où les trois dimensions sont toutes inversées, comme étant *simultanément perverti-inversé.* On peut noter à cette occasion que toutes les positions impliquées par ce concept (celui de situation naturelle ou primaire y étant inclus) sont contenues dans la première colonne du tableau synoptique *supra* et qu'elles appartiennent toutes aux positions réciproques.

On obtient alors d'une manière synoptique :

$$\begin{array}{ll}
1\ 2\ 3 & \text{comme position naturelle} \\[6pt]
\left.\begin{array}{l} 1\ \bar{2}\ \bar{3} \\ \bar{1}\ 2\ \bar{3} \\ \bar{1}\ \bar{2}\ 3 \end{array}\right\} & \text{comme positions inversées} \\[6pt]
\left.\begin{array}{l} \bar{1}\ 2\ 3 \\ 1\ \bar{2}\ 3 \\ 1\ 2\ \bar{3} \end{array}\right\} & \text{comme positions perverties} \\[6pt]
\bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3} & \text{comme position pervertie-inversée.}
\end{array}$$

On pourrait alors dire des miroirs plans ou convexes qu'ils donnent des images perverties, et des images des miroirs concaves qu'elles sont dans certains cas perverties, dans d'autres cas perverties et inversées en même temps. Les images des miroirs difflexes sont dans certains cas inversées, dans d'autres au contraire perverties. Les lentilles divergentes montrent les objets uniquement dans leur position naturelle (rapetissés), les lentilles convergentes les montrent également dans certains cas dans la position naturelle (mais agrandis) et dans d'autres au contraire

* *Umkehrung.*
** *Verkehrung.*

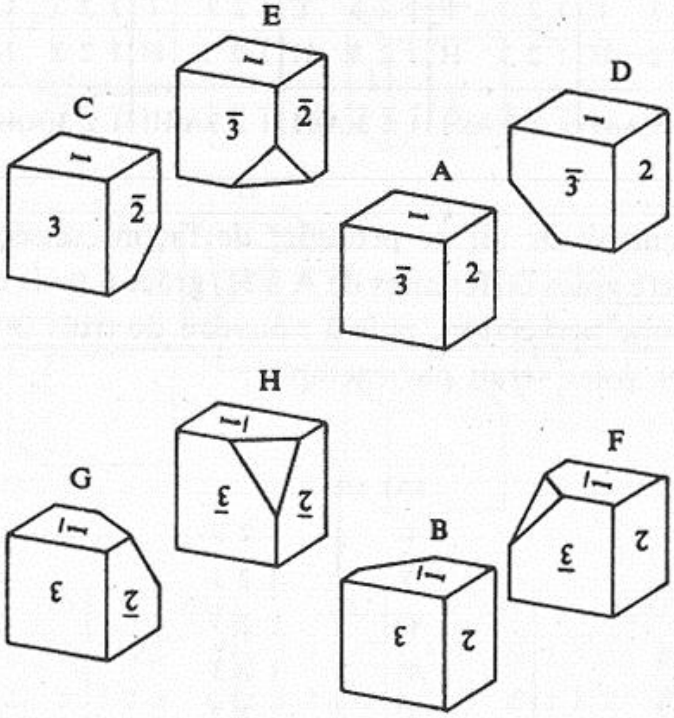
pervertis (ils peuvent être alors soit rapetissés — téléscope —, soit agrandis — microscope). Le téléscope galiléen et le téléscope terrestre, ce dernier étant uniquement composé de verres collectifs, montrent tous deux les objets dans leur position naturelle, alors que le téléscope kepleréen les montre inversés. Parmi les quatre sortes de téléscopes catoptriques, si l'on suppose qu'ils ont tous de simples oculaires agissant comme loupes ou ce qu'on nomme oculaires astronomiques, le téléscope de Gregory donne des images en position naturelle, ceux de Cassegrain et de Newton, des images inversées, et celui de Herschel des images perverties-inversées. En ce qui concerne les microscopes, on peut généralement considérer la position de l'image comme naturelle pour le microscope simple (déjà mentionné ci-dessus) et comme inversée pour le microscope composé — dioptrique aussi bien que catadioptrique. Cependant, selon les particularités de construction et l'adjonction éventuelle de parties accessoires, il peut apparaître des modifications dont il n'est pas question ici de traiter de façon exhaustive. Il suffira de nous arrêter sur quelques uns des cas les plus importants ; et pour commencer, celui des microscopes pancratiques ou de dissection (notamment le microscope de Plössl et Oberhäuser) dont la disposition correspond pour l'essentiel à celle du microscope dioptrique auquel on aurait appliqué des oculaires à effet inversif : on obtient des images en position naturelle. Les inverseurs peuvent être soit composés de façon analogue à celle de l'oculaire du téléscope terrestre, soit construits grâce à deux prismes de verre dont les sections principales sont perpendiculaires et qui pervertissent chacun une dimension de l'image, produisant alors ensemble une inversion. Si l'on projette les images sur un écran, comme c'est le cas avec le microscope solaire, le microscope à gaz et le mégascope, ce sont des images réelles qui remplacent les images virtuelles et qui, pour autant que les instruments que nous venons de citer sont analogues au microscope simple, se trouvent alors dans une position inversée par rapport aux objets eux-mêmes, à condition de les observer, après comme avant, du côté de l'oculaire, en utilisant pour ce faire des écrans transparents ; ces objets seront au contraire en position inversée-pervertie lorsqu'on les regardera sur des écrans opaques, du côté de l'objectif. En ce qui concerne les projecteurs (composés le plus souvent de parties réfléchissantes) par l'intermédiaire desquels on peut projeter des images virtuelles sur une surface de papier regardée directement, afin de calquer les objets microscopiques, dans un tel cas la détermination de la position des images dépendra pour l'essentiel du nombre de réflexions dont on se sera servi. Chaque prisme rectangulaire, aussi bien que la plaque de verre d'Amici ou le miroir de Sömmering, effectue une perversion de l'image. La *camera lucida* de Wollaston engendre par double perversion dans la même dimension la position antérieure (inchangée) ; deux réflexions avec plans de réflexion croisés intervertissent l'image selon deux dimensions, c'est-à-dire l'inversent[1].

Nous allons encore nous servir, comme exemple de positions consécutives, des positions des images en miroir engendrées par trois miroirs plans en position perpendiculaire les uns par rapport aux autres. Si I, II, III désignent les trois miroirs et A l'objet situé par rapport à eux de telle façon que celui-ci se trouve devant chacun des miroirs et soit pourvu des trois axes positionnels, de telle sorte que 1 « conspire » avec la perpendiculaire tirée du côté réfléchissant de I, et de même 2 et 3 avec les perpendiculaires tirées respectivement du côté réfléchissant de

1. On doit être attentif à ce fait lorsqu'on utilise un microscope pour examiner les parties d'un objet qui ont des déterminations topologiques, comme la torsion droite ou gauche dans les parois des vaisseaux spiralés d'une plante, le mouvement des cils des rotateurs, etc. Voici encore quelques exemples tirés des nombreux autres cas où ces concepts ont leur place. Un homme, sur la rive opposée d'une eau dormante, apparaît dans le miroir de l'eau en position pervertie, alors qu'à travers un télescope astronomique, il serait inversé ; quoique les deux images montrent la tête dirigée vers le bas et les pieds vers le haut, dans le cas du dioptrique, on verrait le cœur, si on pouvait l'examiner, à gauche comme dans l'original, et au contraire du côté droit dans le cas du catoptrique. On peut distinguer dans l'écriture une lettre inversée d'une lettre pervertie. Le V latin inversé donne un Λ grec ; le R latin donne quant à lui un Я cyrillique par perversion ; un L latin perverti et inversé donne un Γ grec. Les typographes lisent l'écriture pervertie sans difficulté ; en Angleterre, quelques lecteurs de journaux lisent aisément l'écriture inversée ; on trouve d'ailleurs ce type d'écriture par endroits dans certains ouvrages ; quant à l'écriture pervertie, on la trouve dans de nombreux manuscrits de Léonard de Vinci. Les chiffres inscrits sur l'échelle du magnétomètre de Gauss, doivent, afin de paraître à l'observateur en position naturelle, être à la fois pervertis et inversés, en raison de la perversion due au miroir et de l'inversion due au télescope.

perpendiculaires tirées respectivement du côté réfléchissant de II et de III, alors les positions dans lesquelles se trouvent les sept images en miroir et l'objet les uns par rapport aux autres, sont aisées à établir. Trois images B, C, D engendrées par réflexion simple en arrière de I, II, III, se trouvent, comme le montre la *figure 1*, dans les positions $\bar{1}\,2\,3$, $1\,\bar{2}\,3$ et $1\,2\,\bar{3}$ par rapport à A.

Fig.1



En outre, trois images E, F, G, engendrées par réflexion double en arrière de II et III, de III et I et de I et II, sont dans les positions $1\,\bar{2}\,\bar{3}$, $\bar{1}\,2\,\bar{3}$, $\bar{1}\,\bar{2}\,3$; enfin, l'image H engendrée par réflexion triple, dans la position $\bar{1}\,\bar{2}\,\bar{3}$. Il est alors possible, en partant de A, de progresser de six façons différentes par perversions consécutives simples exclusivement, jusqu'à H, où la somme des sept positions négatives respectives doit nous donner la position primaire négative. C'est-à-dire :

(A)		(A)		(A)		(A)		(A)		(A)	
C	$1\ \bar{2}\ 3$	D	$1\ 2\ \bar{3}$	B	$\bar{1}\ 2\ 3$	C	$1\ \bar{2}\ 3$	D	$1\ 2\ \bar{3}$	D	$\bar{1}\ 2\ 3$
E	$1\ 2\ \bar{3}$	F	$\bar{1}\ 2\ 3$	G	$1\ \bar{2}\ 3$	G	$\bar{1}\ 2\ 3$	E	$1\ \bar{2}\ 3$	F	$1\ 2\ \bar{3}$
D	$1\ \bar{2}\ 3$	B	$1\ 2\ \bar{3}$	C	$\bar{1}\ 2\ 3$	B	$1\ \bar{2}\ 3$	C	$1\ 2\ \bar{3}$	D	$\bar{1}\ 2\ 3$
F	$\bar{1}\ 2\ 3$	G	$1\ \bar{2}\ 3$	E	$1\ 2\ \bar{3}$	F	$1\ 2\ \bar{3}$	G	$\bar{1}\ 2\ 3$	E	$1\ \bar{2}\ 3$
B	$1\ 2\ \bar{3}$	C	$\bar{1}\ 2\ 3$	D	$1\ \bar{2}\ 3$	D	$\bar{1}\ 2\ 3$	B	$1\ \bar{2}\ 3$	C	$1\ 2\ \bar{3}$
G	$1\ \bar{2}\ 3$	E	$1\ 2\ \bar{3}$	F	$\bar{1}\ 2\ 3$	E	$1\ \bar{2}\ 3$	F	$1\ 2\ \bar{3}$	G	$\bar{1}\ 2\ 3$
H	$1\ 2\ \bar{3}$	H	$\bar{1}\ 2\ 3$	H	$1\ \bar{2}\ 3$	H	$\bar{1}\ 2\ 3$	H	$1\ \bar{2}\ 3$	H	$1\ 2\ \bar{3}$
(A)H	$\bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$	(A)H	$\bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$	(A)H	$\bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$	(A)H	$\bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$	A(H)	$\bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$	(A)H	$\bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$

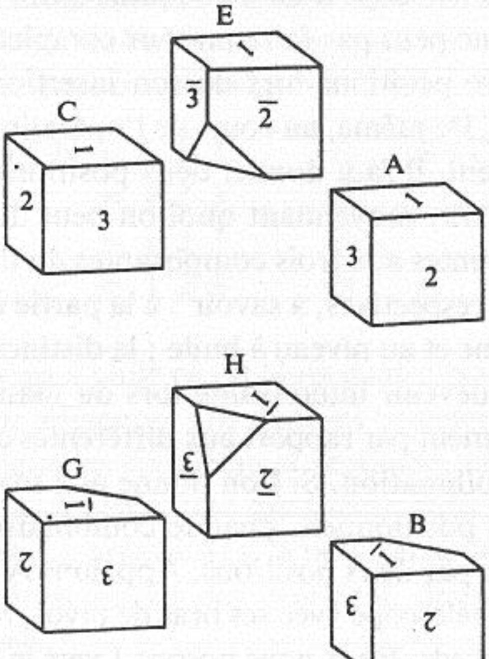
On pourrait de même procéder de façon consécutive par vingt-quatre voies différentes de A à H, grâce à trois inversions suivies d'une perversion, puis à nouveau de trois inversions ; une de ces voies serait par exemple :

(A)	
E	$1\ \bar{2}\ \bar{3}$
F	$\bar{1}\ \bar{2}\ 3$
G	$1\ \bar{2}\ \bar{3}$
B	$1\ \bar{2}\ 3$
C	$\bar{1}\ \bar{2}\ 3$
D	$1\ \bar{2}\ \bar{3}$
H	$\bar{1}\ \bar{2}\ 3$
A(H)	$\bar{1}\ 2\ 3$

La somme négative résulte chaque fois de six positions positives et d'une négative, etc.

Si l'on tourne l'objet A d'un huitième de tour autour du premier axe positionnel, alors toutes les images prennent de nouvelles positions *(fig.2)* et on obtient, à la place des six colonnes de positions consécutives du précédent tableau, les colonnes suivantes :

Fig.2



(A)		*(A)*		*(A)*		*(A)*		*(A)*		*(A)*	
C	1 3 2	*D*	1 $\bar{3}$ $\bar{2}$	*B*	$\bar{1}$ 2 3	*C*	1 3 2	*D*	1 $\bar{3}$ $\bar{2}$	*B*	$\bar{1}$ 2 3
E	1 $\bar{3}$ $\bar{2}$	*F*	$\bar{1}$ 2 3	*G*	1 3 2	*G*	$\bar{1}$ 2 3	*E*	1 3 2	*F*	1 $\bar{3}$ $\bar{2}$
D	1 3 2	*B*	1 $\bar{3}$ $\bar{2}$	*C*	$\bar{1}$ 2 3	*B*	1 3 2	*C*	1 $\bar{3}$ $\bar{2}$	*D*	$\bar{1}$ 2 3
F	$\bar{1}$ 2 3	*G*	1 3 2	*E*	1 $\bar{3}$ $\bar{2}$	*F*	1 $\bar{3}$ $\bar{2}$	*G*	$\bar{1}$ 2 3	*E*	1 3 2
B	1 $\bar{3}$ $\bar{2}$	*C*	$\bar{1}$ 2 3	*D*	1 3 2	*D*	$\bar{1}$ 2 3	*B*	1 3 2	*C*	1 $\bar{3}$ $\bar{2}$
G	1 3 2	*E*	1 $\bar{3}$ $\bar{2}$	*F*	$\bar{1}$ 2 3	*E*	1 3 2	*F*	1 $\bar{3}$ $\bar{2}$	*G*	1 2 3
H	1 $\bar{3}$ $\bar{2}$	*H*	$\bar{1}$ 2 3	*H*	1 3 2	*H*	$\bar{1}$ 2 3	*H*	1 3 2	*H*	1 $\bar{3}$ $\bar{2}$
(A)H	$\bar{1}$ $\bar{2}$ $\bar{3}$	*(A)H*	$\bar{1}$ $\bar{2}$ $\bar{3}$	*(A)H*	$\bar{1}$ $\bar{2}$ $\bar{3}$	*(A)H*	$\bar{1}$ $\bar{2}$ $\bar{3}$	*A(H)*	$\bar{1}$ $\bar{2}$ $\bar{3}$	*(A)H*	$\bar{1}$ $\bar{2}$ $\bar{3}$

Dans ce cas, la septième image en miroir, *H*, se trouve encore, par rapport à l'objet *A*, dans la position primaire négative qui se révèle être la forme de chacune des six colonnes. Du reste, pour des raisons optico-géométriques, l'image *H* doit toujours se trouver dans cette position par rapport à l'objet, quelle que puisse être la direction des axes positionnels de l'objet par rapport aux plans des miroirs.

Dans le maniement de certains instruments mathématiques, les symboles positionnels peuvent souvent être utilisés avec avantage. Par exemple, le télescope d'un théodolithe qui, s'il est placé entre des supports, ne peut pas faire un tour complet verticalement, permet quatre positions lors de son insertion dans les paliers des supports. De même, au cours de l'opération de nivellement de l'instrument, il faut donner deux positions opposées au niveau à bulle d'air, moyennant quoi on peut donner huit combinaisons différentes aux trois composantes du théodolithe dans leurs positions respectives, à savoir : à la partie inférieure, au télescope lui-même et au niveau à bulle ; la distinction de ces combinaisons peut devenir intéressante lors du maniement de l'instrument, notamment par rapport aux différentes corrections ou aux erreurs de collimation. Si l'on donne aux trois composantes certains axes positionnels, chaque combinaison pourra être aisément définie par deux positions. Appelons A l'alidade* avec le support, T le télescope avec ses bras de pivot, N le niveau à bulle ainsi que les pieds. En A nous posons 1 vers le haut selon l'axe vertical, 3 et $\bar{3}$ sur les deux supports, 2 de telle façon que 1, 2, 3 soient en position d'axe droit. En T, nous posons 2 sur l'objectif, donc $\bar{2}$ sur l'oculaire, 3 et $\bar{3}$ aux deux pivots et 1 de telle façon que 1, 2, 3 soient là encore en position d'axe droit. En N nous posons 1 à la partie supérieure du tube de verre, 3 et $\bar{3}$ aux deux pieds et 2 de telle façon que 1, 2, 3 donnent à nouveau une position d'axe droit. Les huit combinaisons sont alors les suivantes :

1)	pos $(A)\mathrm{T} = 1\ 2\ 3$ $(A)\mathrm{N} = 1\ 2\ 3$	5)	pos $(A)\mathrm{T} = 1\ 2\ 3$ $(A)\mathrm{N} = 1\ \bar{2}\ \bar{3}$
2)	pos $(A)\mathrm{T} = \bar{1}\ \bar{2}\ 3$ $(A)\mathrm{N} = 1\ 2\ 3$	5)	pos $(A)\ \mathrm{T} = \bar{1}\ \bar{2}\ 3$ $(A)\mathrm{N} = 1\ \bar{2}\ \bar{3}$
3)	pos $(A)\mathrm{T} = \bar{1}\ 2\ \bar{3}$ $(A)\mathrm{N} = 1\ 2\ 3$	7)	pos $(A)\mathrm{T} = \bar{1}\ 2\ \bar{3}$ $(A)\mathrm{N} = 1\ \bar{2}\ \bar{3}$
4)	pos $(A)\mathrm{T} = 1\ \bar{2}\ \bar{3}$ $(A)\mathrm{N} = 1\ 2\ 3$	8)	pos $(A)\mathrm{T} = 1\ \bar{2}\ \bar{3}$ $(A)\mathrm{N} = 1\ \bar{2}\ \bar{3}$

* L'alidade est l'appareil qui sert à mesurer les angles. *(N.d.T.)*

En inversant la première position *(A)*T dans chacun des huit cas (ce qui laisse d'ailleurs leur forme inchangée dans la mesure où elle est toujours réciproque) et en l'additionnant à la seconde position *(A)*N, il en résulte chaque fois la position du niveau à bulle par rapport au télescope ; soit :

1)	pos (T)N $= 1\ 2\ 3$	5)	pos (T)N $= 1\ \bar{2}\ \bar{3}$
2)	$= \bar{1}\ \bar{2}\ 3$	6)	$= \bar{1}\ 2\ \bar{3}$
3)	$= \bar{1}\ 2\ \bar{3}$	7)	$= 1\ \bar{2}\ \bar{3}$
4)	$= 1\ \bar{2}\ \bar{3}$	8)	$= 1\ 2\ 3$

Le niveau à bulle reçoit alors quatre positions différentes par rapport au télescope, une dans les premier et huitième cas, une seconde dans les deuxième et septième, une troisième dans les troisième et sixième, une quatrième dans les quatrième et cinquième cas. La première est la position naturelle ; les trois autres, des inversions autour des troisième, deuxième et premier axes positionnels.

Dans d'autres cas, il conviendrait d'y ajouter, en tant que nouvel élément, l'espace infini avec des axes positionnels convenablement choisis, comme par exemple pour l'héliotrope, l'inclaison magnétique, etc. Nous laissons le lecteur loisible de tout approfondissement.

De l'hélicoïde

L'hélicoïde est une ligne à deux axes de courbure, qui peut être considérée comme le trajet d'un point se déplaçant dans l'espace simultanément de façon cyclique et progressive.

Afin de donner à ce concept une généralité qui convienne aux considérations topologiques, nous nous servirons des constatations suivantes : nous entendons par le terme de ligne cyclique ou *boucle* (dans notre perspective actuelle), la circonférence de toute figure plane quelconque, à condition que son périmètre ne se croise nulle part lui-même et ne possède pas non plus de points multiples. Un point quelconque à l'intérieur de la surface ainsi encerclée sert de centre à la boucle et l'on peut,